共享教学心得　展示教研成果

数学教学通讯

Correspondence of the Teaching of Mathematics

西南大学　主管
西南大学数学与统计学院　主办

12
下旬
2018

国际标准连续出版物号: ISSN 1001-8875　国内统一连续出版物号: CN 50-1064/G4　邮发代号: 78-18

ISSN 1001-8875
定价: 9.00元

■ 中国核心期刊（遴选）数据库全文收录
■ 中文科技期刊数据库（全文版）收录
■ 中国学术期刊（光盘版）全文收录
■ 知网、万方、维普、龙源等多家网站全文收录

目次
Contents

教学改革

30 巧用平板电脑,让高中数学添翼翱翔 *
——浅析平板电脑在高中数学课堂教学中的应用 …… 夏　华
33 非理性教学认识下高中数学教学中的三种教学方式浅议 …… 周芳芳
35 高中数学创新素养的培养之我见
——基于数学学科核心素养培育的视角 …… 陈　舟
37 翻转课堂学习框架及其对高中数学教学的启示 …… 李定平
39 高中数学:知识与素养的关系再思考
——基于核心素养的背景 …… 陈益龙
41 数学知识与数学活动,催生数学学科核心素养的两大保障 …… 施　炜

问题探索

42 变式在高中数学函数教学中的应用研究
——以"判断两个函数是否为同一函数"教学为例 …… 胡继梅
44 高中数学教学中教师教学想象的价值探究
——基于核心素养及其培育的视角 …… 练育宏
46 高中数学问题情境教学策略实探 …… 冒文文
48 高中数学学习困难成因及教学建议 …… 王小丽

教学反思

50 中学数学习题变式教学之我见 …… 陆秀良
52 高中数学教学视角下的核心素养及学科核心素养理解 …… 刘健玲
54 基于高中数学问题质疑教学方法的思考 …… 孙玉勇
56 浅谈如何培养高中女生数学能力 …… 谈　杰
58 以生为本,板演出彩
——高中数学课堂学生板演的几点思考 …… 王　红
60 追求有思维深度的数学课堂教学 …… 姚　恒
61 关于高中数学学科核心素养的深度思考 …… 房　兵

教学技巧

63 巧用留白,成就智慧数学课堂
——高中数学"课堂留白"教学策略 …… 李凡亮
65 超级画板在高中数学教学中的运用 …… 袁国颖
67 基于直觉思维培养的高中数学教学实践探索 …… 赵后银

试题研究

69 深入探究高考题,解后反思练思维
——以一道高考解析几何题为例 …… 赖国强
71 重温高考经典,品读向量考题
——对一道与向量相关的解析几何题的品读与感悟 …… 郭新河
73 一道高考题引起的关于双绝对值不等式的思考 …… 凯　张悬琳·
75 对一道立体几何题的多解探析与思考 …… 李大才
77 关于数列综合题的多视角突破探析 …… 吴卫东
79 探究椭圆的一组定值性质 …… 童　毅

撰稿指南

1. 来稿以不超过5000字(含图、表)为宜,鼓励作者撰写短文。来稿中须包括:题目、作者姓名、作者单位、单位邮编,文后请附作者联系电话和电子信箱,作者简介(性别、职称、学位、主要研究方向及取得何种成就等)。
2. 来稿须有摘要(不超过100字)和关键词。
3. 来稿的各级标题应层次分明、用字规范,不要生造字词。
4. 来稿中含有数理化公式、表格、曲线图及其他图表等内容,请务必保证其中的符号、数字、文字、图线清晰、规范;插图串文放在相应位置的右面,插图要清楚,线条均匀,图中文字、符号、图序应与正文一致;表格提倡三线表,表中的内容要清晰明了。
5. 参考文献需规范化,未公开发表的资料请勿引用。文献序号以文中出现先后顺序编排,应在文中相应位置以上标的形式标注出。
6. 请按本刊的栏目内容进行撰稿,及时关注我刊的征稿启事。因投稿量大,无论本刊采用与否,概不退稿,请作者自留底稿,投稿者勿一稿多投,若作者在投稿后两个月仍未接到采用通知,可自行处理稿件。本刊原则上只接收电子稿件,不再接收纸质稿件。
7. 来稿需遵循国家的相关法规,文责自负。

深入探究高考题，解后反思练思维
——以一道高考解析几何题为例

赖国强
福建省宁化第一中学　365400

[摘　要] 近几年高考压轴题中出现了众多优秀的考题，这些考题隐含着一定的学习价值，对于学生认识高考命题方向，学习解题思路构建，提升解题思维有着极大的帮助，因此十分有必要开展解题反思学习．以一道高考解析几何题为例，进行深入探究，并从考题出发开展解后反思，提出相应的教学建议．

[关键词] 解析几何；多解；思路；方法；反思；思维

考题再现

(2018年高考数学全国卷I第19题)

设椭圆C：$\frac{x^2}{2}+y^2=1$的右焦点为F，过点F的直线l与C交于点A和B，点M的坐标为$(2,0)$．

(1)当l与x轴垂直时，求直线AM的方程；

(2)设点O为坐标原点，试证明$\angle OMA=\angle OMB$．

思路突破

1．第一问突破

求直线AM的方程，实际上就是求点A的坐标，而点A是过椭圆C的右焦点的直线与椭圆的焦点，因此只需要表示出直线l的方程，然后与椭圆解析式联立求解即可．

由椭圆C的解析式$\frac{x^2}{2}+y^2=1$可得$a=\sqrt{2}$，$b=c=1$，则右焦点F的坐标为$(1,0)$．由于l垂直于x轴，则其斜率不存在，可推得l：$x=1$，然后联立方程可得$\begin{cases}\frac{x^2}{2}+y^2=1,\\x=1,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=1,\\y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2},\end{cases}$则点$A$的坐标为$\left(1,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$或者$\left(1,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，可得$AM$：$y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(x-2)$．

2．第二问突破

求证$\angle OMA=\angle OMB$，考虑到两个角分别为直线AM和MB与x轴所成的锐角，可知若$\angle OMA=\angle OMB$，则直线AM的斜率k_{AM}和直线BM的斜率k_{BM}互为相反数，即$k_{AM}+k_{BM}=0$，因此问题转化为求证两者斜率之和为零的问题，只需设出直线l的方程，联立方程求直线斜率即可．

方法一：直线纵截式方程，考虑斜率不存在与存在两种情形

讨论情形①：当l与x轴垂直时，则OM垂直平分直线AB，此时$\angle OMA=\angle OMB$．

讨论情形②：当l与x轴不垂直时，设直线l的方程为$y=k(x-1)$，直线l与椭圆C的两个交点的坐标为$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，直线AM和直线BM的斜率分比为k_{AM}，k_{BM}，则有$x_1<\sqrt{2}$，$x_2<\sqrt{2}$，$k_{AM}=\frac{y_1}{x_1-2}$，$k_{BM}=\frac{y_2}{x_2-2}$，所以$k_{AM}+k_{BM}=\frac{y_1}{x_1-2}+\frac{y_2}{x_2-2}$．

将点A和B分别代入$y=k(x-1)$，可得$\begin{cases}y_1=kx_1-k,\\y_2=kx_2-k,\end{cases}$代入上式可得$k_{AM}+k_{BM}=\frac{2kx_1x_2-3k(x_1+x_2)+4k}{(x_1-2)(x_2-2)}$．联立$\begin{cases}\frac{x^2}{2}+y^2=1,\\y=k(x-1),\end{cases}$整理得$(2k^2+1)x^2-4k^2x+2k^2-2=0$，则$x_1+x_2=\frac{4k^2}{2k^2+1}$，$x_1x_2=\frac{2k^2-2}{2k^2+1}$，将其代入，有$2kx_1x_2-3k(x_1+x_2)+4k=\frac{(4k^3+8k^3-12k^3)+(-4k+4k)}{2k^2+1}=0$，所以$k_{AM}+k_{BM}=0$，即直线$AM$和直线$BM$的倾斜角互为补角，则$\angle OMA=\angle OMB$．

综上，原式得证．

方法二：直线横截式方程，考虑斜率为零与不为零两种情形$\angle OMA=\angle OMB$

讨论情形①：当l与x轴相重合时，$\angle OMA=\angle OMB$．

讨论情形②：当l与x轴不重合时，设直线l的方程为$x=my+1$，直线l与椭圆C的两个交点的坐标为$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，直线AM和直线BM的斜率分比为k_{AM}，k_{BM}，同理$k_{AM}+k_{BM}=\frac{y_1}{x_1-2}+\frac{y_2}{x_2-2}$．联立直线$l$与椭圆$C$的方程：$\begin{cases}\frac{x^2}{2}+y^2=1,\\x=my+1,\end{cases}$化简整理可得$(m^2+2)y^2+2my-1=0$，须有两个解，故$\Delta=4m^2+4(m^2+2)>0$，可得$y_1+y_2=\frac{-2m}{m^2+2}$，$y_1y_2=\frac{-1}{m^2+2}$，而$k_{AM}+k_{BM}=\frac{2my_1y_2-(y_1+y_2)}{(x_1-2)(x_2-2)}$，用上式整体替换该式的分子，可得$\frac{-2m}{m^2+2}-\frac{-2m}{m^2+2}=0$，即$k_{AM}+k_{BM}==0$，所以直

线MA和MB的倾斜角为互补角，有$\angle OMA=\angle OMB$.

综上，原式得证.

思考：上述两种方法分别构建了直线的纵截式方程和横截式方程，从问题的构建思路来看是相一致的，都是基于直线的倾斜角与斜率的关系进行的问题转化，通过方程的联立完成代数式的研究，是利用代数方程进行的几何问题研究，属于解析几何最为基本的解法. 而求解两个角的相等，我们可以单纯地从几何性质角度进行思考，将OM视为是$\triangle AMB$顶角$\angle AMB$的角平分线，则根据角平分线的性质可以得出一些关于三角形边长的性质. 如在图1所示的$\triangle ABC$中，AD为$\angle BAC$的角平分线，则有$\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC}$，该结论也可以逆推.我们可以考虑将该结论应用于上述考题，避免过多的代数运算.

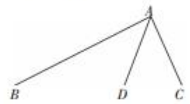

图1

方法三：根据上述展开思路构建，首先过点$M(2,0)$作x轴的垂线，此时就有l'：$x=2$，则l'为椭圆C的右准线，然后分别过点A和B作$AA'\perp l'$，$BB'\perp l'$，其中的垂足设为点A'和点B'，如图2所示，根据椭圆的第二定义有$\frac{|AF|}{|AA'|}=\frac{|BF|}{|BB'|}=e$，变形可知$\frac{|AF|}{|BF|}=\frac{|AA'|}{|BB'|}$，结合$\frac{|AF|}{|BF|}=\frac{|A'M|}{|B'M|}$，可证$\triangle AA'M$与$\triangle BB'M$为相似三角形，所以有$\frac{|AA'|}{|BB'|}=\frac{|AM|}{|BM|}$，可推得$\frac{|AF|}{|BF|}=\frac{|AM|}{|BM|}$，结合三角形内角的平分线性质定理可证$\angle OMA=\angle OMB$.

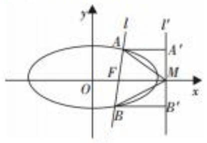

图2

解后反思

上述考题是高中解析几何的典型问题，尤其是第二问与几何角相等的结合，更能体现出数学的学科融合思想，同时问题的求解思路和采用的方法具有一定的代表性，下面将从考题本质入手开展问题转化、多解探析、结论拓展等方面的解题反思.

1. 深入剖析，问题转化

上述考题的核心是第二问求证曲线上所形成的两个角相等，表面上属于典型的几何问题，但剖析上述求解过程可以发现其背后隐含着深刻的数学规律，如解法一和二的代数视角，求解几何角相等实际上就是求证两条直线的斜率关系，即通过求证直线斜率之和为零得出“直线的倾斜角互补”的结论，进而完成等角证明. 而解法三虽然基于的是数学的几何视角，但其求证过程则充分利用了具有角平分线三角形中的边长比例性质，进而将等角问题转化为求证几何边长的比例问题. 从中可以看出复杂问题的解题关键是对问题的合理转化，打开问题求解的突破口.

2. 方法多解，全面思考

“全面思考，严谨推理”是数学问题所需要遵循的指导思想，即深入研究问题，考虑问题全面，严格按照数学的逻辑进行推理论证，如上述考题解法一和二，按照直线l与x轴的关系将其分为两种情形，采用分类讨论的方式进行严格论证，确保了答案得出的准确性. 近几年的高考数学题特别注重对学生全面思考的考查，这就要求我们在分析问题时多思考问题存在的情形，必要时设定一定的标准进行讨论求证. “全面思考，严谨推理”不仅是解题的基本要求，也是一种解题的习惯，养成良好的解题习惯对于问题的准确作答十分重要.

3. 结论拓展，强化应用

数学的解题过程不仅止于问题本质，而在求解结束后十分有必要对考题进行拓展，包括变式拓展和结论的拓展，尤其是对于其中一些具有代表性的考题，在拓展的过程中可以加深学生对考题本质的理解，对问题解法的理解.例如对于上述考题我们可以进一步分析问题中的一些结论，考题证明通过点M的直线与椭圆相交的点为A和B，三个点之间所成的角的关系（$\angle OMA=\angle OMB$），进一步分析可知点M的横坐标与椭圆方程的半轴之间存在着一定的关系：已知椭圆C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，直线$l$经过点$M(c,0)$，且斜率不为零，与椭圆$C$相交于点$A$和$B$，若点$P$的坐标为$\left(\frac{a^2}{c},0\right)$，则直线$PA$和$PB$与$x$轴所成的倾斜角互补.

教学思考

1. 深度研究考题，开展解后反思

在历年的高考中都存在一些优秀的、具有代表性的考题，这些考题对于我们研究高考命题方向、分析解题方法有着重要的帮助，而研究考题需要通过两个环节：一是细致地解读考题，亲身分析计算；二是进行解后反思，深度剖析考题的本质，解题的方法. 其中后一环节是考题研究的关键，决定了考题学习的高度和深度. 在教学中开展解后反思，应该按照如下顺序进行思考：①考题所涉及的知识内容；②考题的问题本质、转化途径；③如何结合问题和条件构建求解思路，有哪些构建的方向；④求解过程用到了哪些方法，需要注意哪些关键点；⑤从考题求解的过程中可以得出哪些结论，并适度拓展.通过上述的反思问题引导全面认识考题，获取考题中的精华.

2. 利用解后反思，提升解题思维

教学中开展解后反思，引导学生由问题出发思考知识点、问题本质、转化方式、构建方式和解题方法，实际上就是让学生学习解题的思路，从而形成自我的解题策略，而分析解题思路的过程对于提升学生的思维能力有着极大的帮助，也是开展解后反思的重要意义所在. 学生的解题能力直接由其思维能力来决定，只有充分提升学生的解题思维，才能从本质上提升学生的解题效率. 利用解后反思提升学生思维，需要注意两点：一是充分引导学生研究考题的方法，包括基本的构建方法和解题指导的思想方法；二是适度引导学生对考题的结论进行延伸，开展考题的拓展学习. 利用考题开展解后反思，让学生在反思中进行思维拓展，充分利用考题的价值，使学生获得长久的发展.