

国家新闻出版广电总局认定的学术期刊
国际标准刊号 ISSN 2095-218X 国内统一刊号 CN23-1575/G4

数理化学习

SHULIHUA XUEXI MAGAZINE

换元法在三角函数求值中的运用

巧用守恒法速解化学题

电磁场中的葫芦模型

齐次化法解不等式题

四面体外接球问题的通用解答策略

2019 / 07

NO.20

高中版

SENIOR HIGH SCHOOL EDITION

ISSN 2095-218X
9 772095 218196
20

目 录

学习指导

- “移花接木”处理“双变量”不等式问题 王海军(10)
- 例谈有关圆锥曲线计算繁杂的一些破解技法 徐德军(13)
- 一道圆锥曲线高考题多解、推广、探源、出新 石向阳(21)
- 换元法在三角函数求值中的运用 段志强(29)
- 破解物理题型的隐含条件 肖燕(48)
- 一、二、三、四、五 理想气体计算搞清楚 柳玉梅, 宋宝(52)

专题研究

- 切线两性质 五年竞赛题 林国红(06)
- 一道 2018 年数学竞赛预赛试题的解法再探 吴家华(19)
- 对 2008 年江苏卷 21 题的探究性学习 刘成龙, 蒋红珠, 杨小兵(32)
- 一道高考模考题的探究与反思 李昌成(43)
- 电磁场中的葫芦模型 吕敏, 田川(55)
- 破解元素在周期表中的位置 李春文(64)

解题途径

- 应用基本不等式 $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ 的常用技巧 张飞雄(03)
- 一道习题的拓展研究 刘族刚, 葛红艳(16)
- 求解涉圆最值题 活用转化就容易 王晖(26)
- 齐次化法解不等式题 胡贵平(35)
- 攻坚气体实验定律: 重视过程, 巧用状态 黄兴仲(45)
- 巧用守恒法速解化学题 曹永霞(61)

教学探讨

- 解一道函数不等式证明题的思维历程 袁莉丹, 邹生书(12)
- 四面体外接球问题的通用解答策略 王洪军(37)
- 巧用“一题多解”渗透数学核心素养 梁健(40)
- 引入中学物理例题的再讨论 沈奕(50)
- 例析高考化学实验题 加强高三实验教学 贺阳(57)
- 浅谈教学中提升学生化学核心素养的方法 孙忠祥(59)

数理化学习

(高中版)

2019 年第 7 期

主管单位: 哈尔滨师范大学

主办单位: 哈尔滨师范大学

主 编: 李双臻

责任编辑: 陈国和 袁建平 李兆东

崔凌飞 张宝清

美术编辑: 王 宇

编辑出版: 《数理化学习》编辑部

地 址: (150080) 哈尔滨市南岗区和
兴路 50 号

E - mail: shulihua12@sina.com

发行部电话: (0451) 88060217 88060095

出版日期: 每月 1 日

发 行: 黑龙江省肇东市邮政局

订 阅: 全国各地邮政局

发行范围: 公开发行

印 刷: 黑龙江北风文化发展有限公司

网 址: <http://www.slhxx.com>中国标准连续出版物号: ISSN 2095 - 218X
CN23 - 1575/G4



应用基本不等式 $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ 的常用技巧

■ 张飞雄

摘要: 对用基本不等式求最值作进一步细化归纳, 特别是对构造定值技巧, 希望给同学们带来帮助.

关键词: 高中数学; 基本不等式; 最值; 定值

同学们利用基本不等式求最值时, 都会注意“一正、二定、三相等”条件, 获得定值条件又是应用基本不等式的难点和关键, 常用的方法如下.

一、拆项、添项、配凑

此法常用在求分式型函数的最值中, 可按由高次项向低次项的顺序逐步配凑.

例 1 (1) 已知 $x > 2$, 求 $f(x) = x + \frac{4}{x-2}$ 的最小值.

(2) 求 $y = \frac{x^2+8}{x-1}$ ($x > 1$) 的最小值.

分析 1: (1) 要求最小值就要构造某个积是定值, $x + \frac{4}{x-2}$ 又不是定值, 这要对上两项中某项拆项、添项、配凑.

解: (1) 因为 $x > 2$, 所以 $x-2 > 0$,

$$\begin{aligned} \text{所以 } f(x) &= x + \frac{4}{x-2} = x-2 + \frac{4}{x-2} + 2 \\ &\geq 2\sqrt{(x-2) \cdot \frac{4}{x-2}} + 2 \\ &= 6. \end{aligned}$$

当且仅当 $x-2 = \frac{4}{x-2}$, 即 $x=4$ 等号成立.

分析 2: (2) 也要构造积是定值, 无从入手, 但对

(1) $x-2 + \frac{4}{x-2} + 2$ 中通分得

$$\frac{(x-2)^2 + 2(x-2) + 4}{x-2} = \frac{x^2 - 2x + 4}{x-2},$$

从而可以考虑将分子 x^2+8 添项、配凑成 $(x-1)^2 + 2(x-1) + 9$.

解: (2) 因为 $x > 1$, 所以 $x-1 > 0$,

$$\begin{aligned} \text{所以 } y &= \frac{x^2+8}{x-1} = \frac{(x-1)^2 + 2(x-1) + 9}{x-1} \\ &= x-1 + \frac{9}{x-1} + 2 \\ &\geq 2\sqrt{(x-1) \cdot \frac{9}{x-1}} + 2 = 8. \end{aligned}$$

当且仅当 $x-1 = \frac{9}{x-1}$, 即 $x=4$ 等号成立.

变式练习:

(1) 本例(1)中的条件“ $x > 2$ ”改为“ $x < 2$ ”, 求 $f(x) = x + \frac{4}{x-2}$ 的最大值.

(2) 在本例(2)中改为求 $f(x) = \frac{x-1}{x^2+8}$ ($x > 1$) 的最大值.

解: (1) 因为 $x < 2$, 所以 $-(x-2) > 0$

$$\begin{aligned} \text{所以 } &-(x-2) + \frac{4}{-(x-2)} \\ &\geq 2\sqrt{-(x-2) \cdot \frac{4}{-(x-2)}} = 4. \end{aligned}$$

所以 $x-2 + \frac{4}{x-2} \leq -4$.

作者简介: 张飞雄(1972-), 福建宁化人, 本科, 中学高级教师, 主要从事高中数学教学研究



所以 $f(x) = x + \frac{4}{x-2} = x-2 + \frac{4}{x-2} + 2 \leq -4 + 2 = -2$.

当且仅当 $x-2 = \frac{4}{x-2}$, 即 $x=0$ 等号成立.

(2) 因为 $x > 1$, 所以 $x-1 > 0$.

$$\begin{aligned} \text{所以 } y &= \frac{x-1}{x^2+8} \\ &= \frac{1}{\frac{x^2+8}{x-1}} \\ &= \frac{1}{\frac{(x-1)^2+2(x-1)+9}{x-1}} \\ &= \frac{1}{x-1+\frac{9}{x-1}+2} \\ &\leq \frac{1}{2\sqrt{(x-1)\cdot\frac{9}{x-1}}+2} \\ &= \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

当且仅当 $x-1 = \frac{9}{x-1}$, 即 $x=4$ 等号成立.

二、常值“1”代换^[1]

这种方法常用于

①“已知 $ax+by=m$ (a, b, x, y 均为正数), 求如 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ 类型的最小值.”

②“已知 $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} = m$ (a, b, x, y 均为正数), 求如 $x+y$ 类型的最小值”.

例2 已知正数 x, y 满足 $\frac{8}{x} + \frac{1}{y} = 1$, 求 $x+2y$ 的最小值.

分析: 解答本题可构建某个积为定值, 这需要对条件进行变形, 然后利用基本不等式求解.

方法1: 因为 $x > 0, y > 0, \frac{8}{x} + \frac{1}{y} = 1$,

所以 $x+2y = (x+2y) \left(\frac{8}{x} + \frac{1}{y}\right) = 10 + \frac{x}{y} +$

$$\frac{16y}{x} \geq 10 + 2\sqrt{\frac{x}{y} \cdot \frac{16y}{x}} = 18,$$

当且仅当 $\frac{x}{y} = \frac{16y}{x}$ 且 $\frac{8}{x} + \frac{1}{y} = 1$, 即 $x=12, y=$

3 时, 等号成立,

故当 $x=12, y=3$ 时, $(x+2y)_{\min} = 18$.

方法2: 因为 $x > 0, y > 0$ 且 $\frac{8}{x} + \frac{1}{y} = 1$,

所以 $y = \frac{x}{x-8}$, 由 $y > 0$, 有 $\frac{x}{x-8} > 0$, 又 $x > 0$, 所

以 $x > 8$, 则

$$\begin{aligned} x+2y &= x + \frac{2x}{x-8} \\ &= x + \frac{2(x-8)+16}{x-8} \\ &= x+2 + \frac{16}{x-8} + 2 \\ &= (x-8) + \frac{16}{x-8} + 10 \end{aligned}$$

$$\geq 2\sqrt{(x-8) \cdot \frac{16}{x-8}} + 10 = 18,$$

当且仅当 $x-8 = \frac{16}{x-8}$, 即 $x=12$ (此时 $y=3$) 时,

等号成立,

故当 $x=12, y=3$ 时, $(x+2y)_{\min} = 18$.

方法3: 由 $\frac{8}{x} + \frac{1}{y} = 1$ 得 $(x-8)(y-1) = 8$.

所以 $x > 8, y > 1$.

而 $x+2y = x-8 + 2(y-1) + 10 \geq 2$

$$\sqrt{(x-8) \cdot 2(y-1)} + 10 = 2\sqrt{16} + 10 = 18.$$

当且仅当 $x-8 = 2(y-1)$ 时,

即 $x=12, y=3$ 时上式取等号,

故当 $x=12, y=3$ 时, $(x+2y)_{\min} = 18$.

变式练习:

设 $x > 0, y > 0$, 且 $2x+8y=xy$, 求 $x+y$ 的最小



值.

解法 1: 由 $2x + 8y - xy = 0$, 得 $y(x - 8) = 2x$.

因为 $x > 0, y > 0$, 所以 $x - 8 > 0, y = \frac{2x}{x - 8}$.

$$\text{所以 } x + y = x + \frac{2x}{x - 8} = x + \frac{2(x - 8) + 16}{x - 8} = (x - 8) + \frac{16}{x - 8} + 10 \geq 2\sqrt{(x - 8) \cdot \frac{16}{x - 8}} + 10 = 18.$$

当且仅当 $x - 8 = \frac{16}{x - 8}$, 即 $x = 12$ 时, 等号成立.

所以 $x + y$ 的最小值是 18.

解法 2: 由 $2x + 8y - xy = 0$ 及 $x > 0, y > 0$, 得 $\frac{2}{y}$

$$+ \frac{8}{x} = 1.$$

$$\text{所以 } x + y = (x + y) \left(\frac{2}{y} + \frac{8}{x} \right) = \frac{2x}{y} + \frac{8y}{x} + 10 \geq 2\sqrt{\frac{2x}{y} \cdot \frac{8y}{x}} + 10 = 18.$$

当且仅当 $\frac{2x}{y} = \frac{8y}{x}$, 即 $x = 2y = 12$ 时等号成立.

所以 $x + y$ 的最小值是 18.

题后感悟: 在利用基本不等式求最值时, 除注意“一正、二定、三相等”的条件外, 最重要的是构建“定值”, 恰当变形、合理拆分项或配凑项是常用的解题技巧.

三、构造不等式

当和与积同时出现在同一个等式中时, 可“利用

基本不等式构造一个不等式从而求出和或积的取值范围”.

例 3^[1] 对正数 x, y , 若 $x + 2y + xy = 30$, 求 xy 的取值范围.

解: 因为 x, y 都是正实数, 故 $30 = x + 2y + xy \geq 2\sqrt{2xy} + xy$, 当且仅当 $x = 2y$, 即 $x = 6, y = 3$ 时, 取等号. 所以 $xy + 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{xy} - 30 \leq 0$, 令 $\sqrt{xy} = t$, 则 $t > 0$, 得 $t^2 + 2\sqrt{2}t - 30 \leq 0$, 解得 $-5\sqrt{2} \leq t \leq 3\sqrt{2}$, 又 $t > 0$, 所以 $0 < \sqrt{xy} \leq 3\sqrt{2}$, 即 $xy \in (0, 18]$.

变式练习:

已知 $x > 0, y > 0, x + 3y + xy = 9$, 求 $x + 3y$ 最小值.

解: 因为 x, y 都是正实数, $xy = 9 - (x + 3y)$, 即 $27 - 3(x + 3y) = 3xy \leq \left(\frac{x + 3y}{2}\right)^2$, 令 $x + 3y = t$, 则 $t^2 + 12t - 108 \geq 0$, 解得 $t \geq 6$, 即 $x + 3y \geq 6$.

通过以上对基本不等式求最值问题的归纳, 相信大家对于构造定值的方法应该有所掌握, 其实只要我们用于探索、挖掘条件, 很多问题都能迎刃而解.

参考文献:

[1] 高中课标教材同步导学丛书《名校学案》必修 5A 版[M]. 福建教育出版社, 2018.

[福建省宁化第一中学 (365400)]

2

小

报

2019年7月