国家新闻出版广电总局认定的学术期刊
国际标准刊号 ISSN 2095-218X 国内统一刊号 CN23-1575/G4

数理化学习

SHULIHUA XUEXI MAGAZINE

2019 / 07
NO.20

高中版
SENIOR HIGH SCHOOL EDITION

ISSN 2095-218X
9 772095 218196 20

目 录

数理化学习

(高中版)

2019 年第 7 期

主管单位:哈尔滨师范大学
主办单位:哈尔滨师范大学
主　　编:李双臻
责任编辑:陈国和　袁建平　李兆东
　　　　　崔凌飞　张宝清
美术编辑:王　宇
编辑出版:《数理化学习》编辑部
地　　址:(150080)哈尔滨市南岗区和兴路50号
E - mail:shulihua12@sina.com
发行部电话:(0451)88060217　88060095

出版日期:每月1日
发　　行:黑龙江省肇东市邮政局
订　　阅:全国各地邮政局
发行范围:公开发行
印　　刷:黑龙江北风文化发展有限公司
网　　址:http://www.slhxx.com

中国标准连续出版物号:ISSN 2095-218X / CN23-1575/G4

应用基本不等式$\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}$的常用技巧

■ 张飞雄

摘要:对用基本不等式求最值作进一步细化归纳,特别对构造定值技巧,希望给同学们带来帮助.

关键词:高中数学;基本不等式;最值;定值

同学们利用基本不等式求最值时,都会注意"一正、二定、三相等"条件,获得定值条件又是应用基本不等式的难点和关键,常用的方法如下.

一、拆项、添项、配凑

此法常用在求分式型函数的最值中,可按由高次项向低次项的顺序逐步配凑.

例1 (1)已知$x>2$,求$f(x)=x+\frac{4}{x-2}$的最小值.

(2)求$y=\frac{x^2+8}{x-1}(x>1)$的最小值.

分析1:(1)要求最小值就要构造某个积是定值,$x\cdot\frac{4}{x-2}$又不是定值,这要对上两项中某项拆项、添项、配凑.

解:(1)因为$x>2$,所以$x-2>0$,

所以$f(x)=x+\frac{4}{x-2}=x-2+\frac{4}{x-2}+2$

$\geqslant 2\sqrt{(x-2)\frac{4}{x-2}}+2$

$=6$.

当且仅当$x-2=\frac{4}{x-2}$,即$x=4$等号成立.

分析2:(2)也要构造积是定值,无从入手,但对(1)$x-2+\frac{4}{x-2}+2$中通分得

$$\frac{(x-2)^2+2(x-2)+4}{x-2}=\frac{x^2-2x+4}{x-2},$$

从而可以考虑将分子x^2+8添项、配凑成$(x-1)^2+2(x-1)+9$.

解:(2)因为$x>1$,所以$x-1>0$,

所以$y=\frac{x^2+8}{x-1}=\frac{(x-1)^2+2(x-1)+9}{x-1}$

$=x-1+\frac{9}{x-1}+2$

$\geqslant 2\sqrt{(x-1)\frac{9}{x-1}}+2=8$.

当且仅当$x-1=\frac{9}{x-1}$,即$x=4$等号成立.

变式练习:

(1)本例(1)中的条件"$x>2$"改为"$x<2$",求$f(x)=x+\frac{4}{x-2}$的最大值.

(2)在本例(2)中改为求$f(x)=\frac{x-1}{x^2+8}(x>1)$的最大值.

解:(1)因为$x<2$,所以$-(x-2)>0$

所以$-(x-2)+\frac{4}{-(x-2)}$

$\geqslant 2\sqrt{-(x-2)\cdot\frac{4}{-(x-2)}}=4$.

所以$x-2+\frac{4}{x-2}\leqslant -4$.

作者简介:张飞雄(1972-),福建宁化人,本科,中学高级教师,主要从事高中数学教学研究

所以$f(x)=x+\frac{4}{x-2}=x-2+\frac{4}{x-2}+2\leqslant -4+2=-2.$

当且仅当$x-2=\frac{4}{x-2}$,即$x=0$等号成立.

(2) 因为$x>1$,所以$x-1>0$.

所以$y=\frac{x-1}{x^2+8}$

$=\frac{1}{\frac{x^2+8}{x-1}}$

$=\frac{1}{\frac{(x-1)^2+2(x-1)+9}{x-1}}$

$=\frac{1}{x-1+\frac{9}{x-1}+2}$

$\leqslant\frac{1}{2\sqrt{(x-1)\cdot\frac{9}{x-1}}+2}$

$=\frac{1}{8}$.

当且仅当$x-1=\frac{9}{x-1}$,即$x=4$等号成立.

二、常值"1"代换[1]

这种方法常用于

①"已知$ax+by=m$(a、b、x、y均为正数),求如$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$类型的最小值."

②"已知$\frac{a}{x}+\frac{b}{x}=m$ (a、b、x、y均为正数),求如$x+y$类型的最小值".

例2 已知正数x,y满足$\frac{8}{x}+\frac{1}{y}=1$,求$x+2y$的最小值.

分析:解答本题可构建某个积为定值,这需要对条件进行变形,然后利用基本不等式求解.

方法1:因为$x>0,y>0,\frac{8}{x}+\frac{1}{y}=1$,

所以$x+2y=(x+2y)\left(\frac{8}{x}+\frac{1}{y}\right)=10+\frac{x}{y}+\frac{16y}{x}\geqslant 10+2\sqrt{\frac{x}{y}\cdot\frac{16y}{x}}=18$,

当且仅当$\frac{x}{y}=\frac{16y}{x}$且$\frac{8}{x}+\frac{1}{y}=1$,即$x=12,y=3$时,等号成立,

故当$x=12,y=3$时,$(x+2y)_{\min}=18$.

方法2:因为$x>0,y>0$且$\frac{8}{x}+\frac{1}{y}=1$,

所以$y=\frac{x}{x-8}$,由$y>0$,有$\frac{x}{x-8}>0$,又$x>0$,所以$x>8$,则

$x+2y=x+\frac{2x}{x-8}$

$=x+\frac{2(x-8)+16}{x-8}$

$=x+2+\frac{16}{x-8}+2$

$=(x-8)+\frac{16}{x-8}+10$

$\geqslant 2\sqrt{(x-8)\cdot\frac{16}{x-8}}+10=18$,

当且仅当$x-8=\frac{16}{x-8}$,即$x=12$(此时$y=3$)时,等号成立,

故当$x=12,y=3$时,$(x+2y)_{\min}=18$.

方法3:由$\frac{8}{x}+\frac{1}{y}=1$得$(x-8)(y-1)=8$.

所以$x>8,y>1$.

而$x+2y=x-8+2(y-1)+10\geqslant 2\sqrt{(x-8)\cdot 2(y-1)}+10=2\sqrt{16}+10=18$.

当且仅当$x-8=2(y-1)$时,

即$x=12,y=3$时上式取等号,

故当$x=12,y=3$时,$(x+2y)_{\min}=18$.

变式练习:

设$x>0,y>0$,且$2x+8y=xy$,求$x+y$的最小

值.

解法1:由 $2x+8y-xy=0$,得 $y(x-8)=2x$.

因为 $x>0,y>0$,所以 $x-8>0,y=\frac{2x}{x-8}$,

所以 $x+y=x+\frac{2x}{x-8}=x+\frac{2(x-8)+16}{x-8}=(x-8)+\frac{16}{x-8}+10\geqslant 2\sqrt{(x-8)\cdot\frac{16}{x-8}}+10=18$.

当且仅当 $x-8=\frac{16}{x-8}$,即 $x=12$ 时,等号成立.

所以 $x+y$ 的最小值是18.

解法2:由 $2x+8y-xy=0$ 及 $x>0,y>0$,得 $\frac{2}{y}+\frac{8}{x}=1$.

所以 $x+y=(x+y)(\frac{2}{y}+\frac{8}{x})=\frac{2x}{y}+\frac{8y}{x}+10\geqslant 2\sqrt{\frac{2x}{y}\cdot\frac{8y}{x}}+10=18$.

当且仅当 $\frac{2x}{y}=\frac{8y}{x}$,即 $x=2y=12$ 时等号成立.

所以 $x+y$ 的最小值是18.

题后感悟:在利用基本不等式求最值时,除注意"一正、二定、三相等"的条件外,最重要的是构建"定值",恰当变形、合理拆分项或配凑项是常用的解题技巧.

三、构造不等式

当和与积同时出现在同一个等式中时,可"利用基本不等式构造一个不等式从而求出和或积的取值范围".

例3[1] 对正数 x,y,若 $x+2y+xy=30$,求 xy 的取值范围.

解:因为 x,y 都是正实数,故 $30=x+2y+xy\geqslant 2\sqrt{2xy}+xy$,当且仅当 $x=2y$,即 $x=6,y=3$ 时,取等号.所以 $xy+2\sqrt{2}\sqrt{xy}-30\leqslant 0$,令 $\sqrt{xy}=t$,则 $t>0$,得 $t^2+2\sqrt{2}t-30\leqslant 0$,解得 $-5\sqrt{2}\leqslant t\leqslant 3\sqrt{2}$,又 $t>0$,所以 $0<\sqrt{xy}\leqslant 3\sqrt{2}$,即 $xy\in(0,18]$.

变式练习:

已知 $x>0,y>0,x+3y+xy=9$,求 $x+3y$ 最小值.

解:因为 x,y 都是正实数,$xy=9-(x+3y)$,即 $27-3(x+3y)=3xy\leqslant(\frac{x+3y}{2})^2$,令 $x+3y=t$,则 $t^2+12t-108\geqslant 0$,解得 $t\geqslant 6$,即 $x+3y\geqslant 6$.

通过以上对基本不等式求最值问题的归纳,相信大家对构造定值的方法应该有所掌握,其实只要我们用于探索、挖掘条件,很多问题都能迎刃而解.

参考文献:

[1] 高中课标教材同步导学丛书《名校学案》必修5A版[M].福建教育出版社,2018.

[福建省宁化第一中学(365400)]