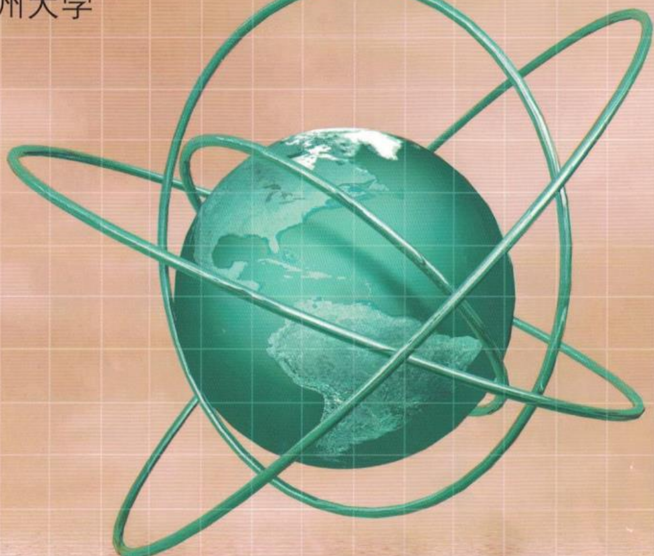
邮发代号：28-425

主办单位：扬州大学

- 实用性
- 可读性
- 资料性



高中数学教与学

GAOZHONG SHUXUE JIAOYUXUE

11 2018

江苏省一级期刊

ISSN 1007-1830

GAOZHONG SHUXUE JIAOYUXUE

高中数学教与学

（教研版）

1992年创刊

2018年11月20日出版

主管单位 江苏省教育厅

主办单位 扬州大学

主　　编 庄亚栋

副 主 编 季素月 蒋宏圣

本期责编 草 原

出版单位

中学数学教与学编辑部

地　　址

江苏省扬州大学瘦西湖校区

邮　　编:225002

电　　话:0514-87975297

印刷单位

扬州古籍线装文化有限公司

总 发 行 扬州邮政局

订　　阅 全国各地邮政局

发行范围 公 开

代　　号 28-425

定　　价 4.30元

ISSN 1007-1830

CN 32-1398/G4

2018年11月（总第418期） 目次

捕捉有效信息 准确快速解题

温建益

（福建省宁化县第一中学，365400）

学习数学离不开解题，解题时应捕捉有用信息，联系有关概念、定理、公式快速解题.现举两例，抛砖引玉，说明如下.

例1 （解三角形问题）如图1，在 $\triangle ABC$ 中，$AD\perp AB$，$|BC|=\sqrt{3}|BD|$，$|AD|=1$，$|AC|=3$，则 $\cos\angle CAD=$ ____

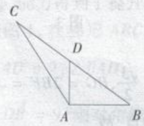


图1

思路1 已知三角形中某些边长，求夹角问题很自然会想到向量法.本题中由题设知 $\triangle ACD$ 中，$|AD|=1$，$|AC|=3$，而所求为 $\cos\angle CAD$，又 $AD\perp AB$，故考虑以 $\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AB}$ 为基向量表示数量积 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}$ 解之.

解法1 （向量法）

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{AD}|\cos\angle CAD=3\cos\angle CAD,$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}&=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})\cdot\overrightarrow{AD}\\&=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD}\\&=\sqrt{3}\,\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AD}\\&=\sqrt{3}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD})\cdot\overrightarrow{AD}\\&=\sqrt{3}|\overrightarrow{AD}|^2=\sqrt{3},\end{aligned}$$

$\therefore \cos\angle CAD=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

思路2 此题已知三角形中的边长关系及一些边长，求角问题，考虑解三角形的通法，即正弦定理或余弦定理，是很常规的一种做法.加之此题又有 $AD\perp AB$ 这一条件，可得 $\cos\angle CAD=\sin\angle CAB$，所以考虑在 $\triangle ABC$ 中用正弦定理求解.

解法2 （利用正弦定理）

$\because$ 在 $\triangle ABC$ 中，$AD\perp AB$，

$\therefore \cos\angle CAD=\sin\angle CAB$，$\sin B=\dfrac{AD}{BD}$.

在 $\triangle ABC$ 中，

$$\frac{BC}{\sin\angle CAB}=\frac{AC}{\sin B}=\frac{AC\cdot BD}{AD},$$

$$\therefore\quad \frac{\sqrt{3}BD}{\sin\angle CAB}=\frac{3BD}{1},$$

$\therefore \cos\angle CAD=\sin\angle CAB=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

思路3 题中条件 $|BC|=\sqrt{3}|BD|$ 即为 $\dfrac{|BC|}{|BD|}=\sqrt{3}$，由此联想到相似比.又 $AD\perp AB$，考虑过 C 作垂线构造相似于 $\triangle BDA$ 的 $\triangle BCE$，将求 $\cos\angle CAD$，转化为 $\sin\angle CAE=\dfrac{|CE|}{|CA|}$.

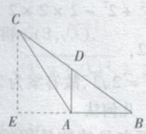


图2

解法3 如图2，过点 C 作 CE 垂直于直线 BA 交 BA 延长线于点 E.

$\because AD\perp AB$，

$\therefore CE\parallel DA$.

$\because |BC|=\sqrt{3}|BD|, |AD|=1,$

$\therefore |CE|=\sqrt{3}|AD|=\sqrt{3}.$

$\because |AC|=3,$

$\therefore \cos\angle CAD=\sin\angle CAE=\dfrac{|CE|}{|AC|}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}.$

例2 （抛物线焦半径问题）已知双曲线 $C_1:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的离心率为 $\sqrt{2}$；抛物线 $C_2:y^2=2px(p>0)$ 的焦点到双曲线 C_1 的渐近线的距离为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. 过抛物线 C_2 的焦点 F 的直线交抛物线于 M,N 两点，则 $|MF||NF|$ 的最小值是(　　)

(A) $\sqrt{2}$　(B) 2　(C) 4　(D) $4\sqrt{2}$

解　由已知双曲线 $C_1:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的离心率为 $\sqrt{2}$，得双曲线渐近线方程为 $y=\pm x$，

又抛物线 $C_2:y^2=2px(p>0)$ 的焦点到双曲线 C_1 的渐近线的距离为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $p=2$.

求 $|MF||NF|$ 的最小值可以用以下4种方法：

方法1　（目标函数法）求 $|MF||NF|$ 的最小值，即想到用焦半径公式先求目标函数，再求最值.

设过抛物线 C_2 的焦点 F 的直线 MN 的倾斜角为 θ，则

$$|MF||NF|=\frac{p}{1-\cos\theta}\cdot\frac{p}{1+\cos\theta}=\frac{p^2}{\sin^2\theta}=\frac{4}{\sin^2\theta}\geqslant 4.$$

方法2　（基本不等式法）本题求积的最小值，想到相应倒数和为定值，故联想到基本不等式法.

$$\because \frac{2}{p}=1=\frac{1}{|MF|}+\frac{1}{|NF|}\geqslant 2\sqrt{\frac{1}{|MF|}\cdot\frac{1}{|NF|}},$$

$\therefore\quad |MF||NF|\geqslant 4.$

也可这样解：

$$\because \frac{2}{p}=1=\frac{1}{|MF|}+\frac{1}{|NF|}=\frac{|MF|+|NF|}{|MF||NF|},$$

$$|MF|+|NF|=|MF||NF|\geqslant 2\sqrt{|MF||NF|},$$

$\therefore\quad |MF||NF|\geqslant 4.$

方法3　由方法2，得

$|MF|+|NF|=|MF||NF|.$

将 $|MF||NF|$ 转化为和，即可用焦点弦长公式求它的最小值.

$$|MF||NF|=|MF|+|NF|=\frac{p}{1-\cos\theta}+\frac{p}{1+\cos\theta}=\frac{2p}{\sin^2\theta}\geqslant 4.$$

方法4　（常规法）用代数法将积表示出来，即可求其最小值.

设 $M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$，则

$|MF|=x_1+1, |NF|=x_2+1.$

由 $\begin{cases}y^2=4x,\\ x=ty+1,\end{cases}$ 得

$$y^2-4ty-4=0,$$

$\therefore y_1+y_2=4t, y_1y_2=-4,$

$$\begin{aligned}\therefore |MF||NF|&=(x_1+1)(x_2+1)\\&=(ty_1+2)(ty_2+2)\\&=t^2y_1y_2+2t(y_2+y_2)+4\\&=-4t^2+8t^2+4\\&=4t^2+4\geqslant 4.\end{aligned}$$