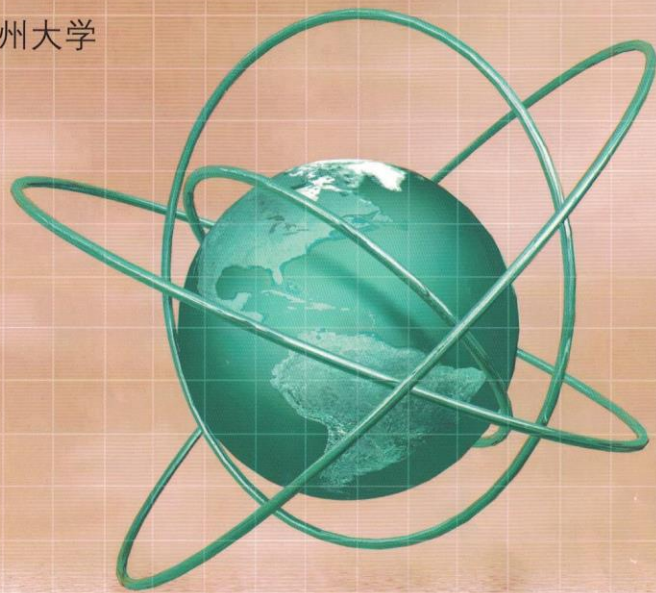


SHUXUE

邮发代号：28-425

主办单位：扬州大学

- 实用性
- 可读性
- 资料性



高中数学

教与学

GAOZHONG SHUXUE JIAOYUXUE

11 2018

江苏省一级期刊

ISSN 1007-1830

GAOZHONG SHUXUE JIAOYUXUE

高中数学教与学

(教研版)

1992年创刊

2018年11月20日出版

主管单位 江苏省教育厅

主办单位 扬州大学

主编 庄亚栋

副主编 季素月 蒋宏圣

本期责编 草原

出版单位

中学数学教与学编辑部

地址

江苏省扬州大学瘦西湖校区

邮编:225002

电话:0514-87975297

印刷单位

扬州古籍线装文化有限公司

总发行 扬州邮政局

订阅 全国各地邮政局

发行范围 公开

代号 28-425

定价 4.30元

ISSN 1007-1830
CN 32-1398/G4

2018年11月(总第418期) 目次

► 数学教育

对学生解题一错再错现象的思考 唐俊涛(1)

高三艺术生数学“纠错清单”的编制与应用 李隽易(4)

以学生为主体的数学课堂教学策略探究
..... 胡继东 张兵(6)

如何实现信息技术与数学学科的融合 张天山 胡晓梅(8)

探寻源头活水 提升核心素养 蔡斌畏(10)

追本溯源 立足本质
——对一道高考题的思考 赵意扬(13)

巧借单位圆推导三角函数的诱导公式 王丽萍(16)

► 教学研究

引例搭建平台 聚焦核心素养

——以“点到直线距离公式的推导”教学为例 龙正祥(18)

高中数学问题驱动式教学实践研究

——以“分层抽样与系统抽样”教学为例 侯有岐(22)

“双曲线标准方程”的教学设计 刘红艳(25)

浅议函数思想在数列教学中的渗透

——由一道题所引发的思考 董琦(29)

传承特色 引领教学

——一道高考题的赏析与探究 黄旭东 李暄(31)

► 高考复习研究

挖掘试题内涵 赏析数学文化

——以2018年各省市数学高考题为例 阮文婷 孔德鹏(34)

例析高三复习中的一题多解与一题多变

..... 程国平(37)

高考试题中若干背景剖析 黄雄林(39)

► 解题研究

一类递推数列通项公式的求解 邵付松(42)

巧用分数小性质 妙解高考压轴题 姜庆国(44)

破解向量问题的“三板斧” 王义霞(46)

捕捉有效信息 准确快速解题 温建益(48)

捕捉有效信息 准确快速解题

温建益

(福建省宁化县第一中学, 365400)

学习数学离不开解题, 解题时应捕捉有用信息, 联系有关概念、定理、公式快速解题. 现举两例, 抛砖引玉, 说明如下.

例1 (解三角形问题) 如图1, 在 $\triangle ABC$ 中, $AD \perp AB$, $|BC| = \sqrt{3}|BD|$, $|AD| = 1$, $|AC| = 3$, 则 $\cos \angle CAD =$ _____.

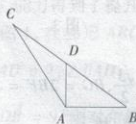


图1

思路1 已知三角形中某些边长, 求夹角问题很自然会想到向量法. 本题中由题设知 $\triangle ACD$ 中, $|AD| = 1$, $|AC| = 3$, 而所求为 $\cos \angle CAD$, 又 $AD \perp AB$, 故考虑以 \vec{AD}, \vec{AB} 为基向量表示数量积 $\vec{AC} \cdot \vec{AD}$ 解之.

解法1 (向量法)

$$\begin{aligned} \vec{AC} \cdot \vec{AD} &= |\vec{AC}| |\vec{AD}| \cos \angle CAD \\ &= 3 \cos \angle CAD, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{AC} \cdot \vec{AD} &= (\vec{AB} + \vec{BC}) \cdot \vec{AD} \\ &= \vec{AB} \cdot \vec{AD} + \vec{BC} \cdot \vec{AD} \\ &= \sqrt{3} \vec{BD} \cdot \vec{AD} \\ &= \sqrt{3} (\vec{BA} + \vec{AD}) \cdot \vec{AD} \\ &= \sqrt{3} |\vec{AD}|^2 = \sqrt{3}, \end{aligned}$$

$$\therefore \cos \angle CAD = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

思路2 此题已知三角形中的边长关系及一些边长, 求角问题, 考虑解三角形的通

法, 即正弦定理或余弦定理, 是很常规的一种做法. 加之此题又有 $AD \perp AB$ 这一条件, 可得 $\cos \angle CAD = \sin \angle CAB$, 所以考虑在 $\triangle ABC$ 中用正弦定理求解.

解法2 (利用正弦定理)

\therefore 在 $\triangle ABC$ 中, $AD \perp AB$,

$$\therefore \cos \angle CAD = \sin \angle CAB, \sin B = \frac{AD}{BD}$$

在 $\triangle ABC$ 中,

$$\frac{BC}{\sin \angle CAB} = \frac{AC}{\sin B} = \frac{AC \cdot BD}{AD},$$

$$\therefore \frac{\sqrt{3}BD}{\sin \angle CAB} = \frac{3BD}{1},$$

$$\therefore \cos \angle CAD = \sin \angle CAB = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

思路3 题中条件 $|BC| = \sqrt{3}|BD|$ 即为 $\frac{|BC|}{|BD|} = \sqrt{3}$, 由此联想到相似比. 又 $AD \perp AB$, 考虑过 C 作垂线构造相似于 $\triangle BDA$ 的 $\triangle BCE$, 将求 $\cos \angle CAD$, 转化为 $\sin \angle CAE = \frac{|CE|}{|CA|}$.

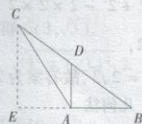


图2

解法3 如图2, 过点 C 作 CE 垂直于直线 BA 交 BA 延长线于点 E .

$\therefore AD \perp AB$,

$\therefore CE \parallel DA$.

$$\therefore |BC| = \sqrt{3}|BD|, |AD| = 1,$$

$$\therefore |CE| = \sqrt{3}|AD| = \sqrt{3}.$$

$$\therefore |AC| = 3,$$

$$\therefore \cos \angle CAD = \sin \angle CAE = \frac{|CE|}{|AC|} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

例 2 (抛物线焦半径问题) 已知双曲线 $C_1: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的离心率为 $\sqrt{2}$; 抛物线 $C_2: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点到双曲线 C_1 的渐近线的距离为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$. 过抛物线 C_2 的焦点 F 的直线交抛物线于 M, N 两点, 则 $|MF| \cdot |NF|$ 的最小值是()

- (A) $\sqrt{2}$ (B) 2 (C) 4 (D) $4\sqrt{2}$

解 由已知双曲线 $C_1: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的离心率为 $\sqrt{2}$, 得双曲线渐近线方程为 $y = \pm x$,

又抛物线 $C_2: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点到双曲线 C_1 的渐近线的距离为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 所以 $p = 2$.

求 $|MF| \cdot |NF|$ 的最小值可以用以下 4 种方法:

方法 1 (目标函数法) 求 $|MF| \cdot |NF|$ 的最小值, 即想到用焦半径公式先求目标函数, 再求最值.

设过抛物线 C_2 的焦点 F 的直线 MN 的倾斜角为 θ , 则

$$\begin{aligned} |MF| \cdot |NF| &= \frac{p}{1 - \cos \theta} \cdot \frac{p}{1 + \cos \theta} \\ &= \frac{p^2}{\sin^2 \theta} = \frac{4}{\sin^2 \theta} \\ &\geq 4. \end{aligned}$$

方法 2 (基本不等式法) 本题求积的最小值, 想到相应倒数和为定值, 故联想到基本不等式法.

$$\therefore \frac{2}{p} = 1 = \frac{1}{|MF|} + \frac{1}{|NF|}$$

$$\geq 2\sqrt{\frac{1}{|MF|} \cdot \frac{1}{|NF|}},$$

$$\therefore |MF| \cdot |NF| \geq 4.$$

也可这样解:

$$\therefore \frac{2}{p} = 1 = \frac{1}{|MF|} + \frac{1}{|NF|}$$

$$= \frac{|MF| + |NF|}{|MF| \cdot |NF|},$$

$$|MF| + |NF| = |MF| \cdot |NF|$$

$$\geq 2\sqrt{|MF| \cdot |NF|},$$

$$\therefore |MF| \cdot |NF| \geq 4.$$

方法 3 由方法 2, 得

$$|MF| + |NF| = |MF| \cdot |NF|.$$

将 $|MF| \cdot |NF|$ 转化为和, 即可用焦点弦长公式求它的最小值.

$$\begin{aligned} |MF| \cdot |NF| &= |MF| + |NF| \\ &= \frac{p}{1 - \cos \theta} + \frac{p}{1 + \cos \theta} \\ &= \frac{2p}{\sin^2 \theta} \\ &\geq 4. \end{aligned}$$

方法 4 (常规法) 用代数法将积表示出来, 即可求其最小值.

设 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$, 则

$$|MF| = x_1 + 1, |NF| = x_2 + 1.$$

$$\text{由 } \begin{cases} y^2 = 4x, \\ x = ty + 1, \end{cases} \text{ 得}$$

$$y^2 - 4ty - 4 = 0,$$

$$\therefore y_1 + y_2 = 4t, y_1 y_2 = -4,$$

$$\therefore |MF| \cdot |NF| = (x_1 + 1)(x_2 + 1)$$

$$= (ty_1 + 2)(ty_2 + 2)$$

$$= t^2 y_1 y_2 + 2t(y_1 + y_2) + 4$$

$$= -4t^2 + 8t^2 + 4$$

$$= 4t^2 + 4 \geq 4.$$