国家新闻出版广电总局认定的学术期刊
国际标准刊号 ISSN 2095-218X 国内统一刊号 CN23-1575/G4

数理化学习

SHULIHUA XUEXI MAGAZINE

2020 / 06
NO.17

高中版
SENIOR HIGH SCHOOL EDITION

ISSN 2095-218X
9 772095 218202 17

目 录

数理化学习

(高中版)
2020 年第 6 期

主管单位:哈尔滨师范大学
主办单位:哈尔滨师范大学
主　　编:李双臻
责任编辑:黄永辉　袁建平　李兆东
　　　　　崔凌飞　张宝清　褚树杰
美术编辑:王　宇
编辑出版:《数理化学习》编辑部
地　　址:(150080)哈尔滨市南岗区和兴路 50 号
E－mail:shulihua12@sina.com
发行部电话:(0451)88060217　88060095

出版日期:每月 1 日
发　　行:黑龙江省肇东市邮政局
订　　阅:全国各地邮政局
发行范围:公开发行
印　　刷:哈尔滨久利印刷有限公司
网　　址:http://www.slhxx.com

中国标准连续出版物号:ISSN 2095－218X / CN23－1575/G4

巧构辅助可导函数解答抽象函数不等式

■ 张飞雄

摘要：抽象函数不等式问题，没有具体函数表达式，有较大难度和灵活性，本文归纳几种巧构可导函数，分解抽象函数不等式的解法供同学们参考.

关键词：不等式；辅助函数；抽象函数

近几年高考和模拟考试中有一类抽象可导函数不等式小题成为热点，此类题目以能力立意短小精悍，难度较大，得分率较低，学生往往感到不知所措. 若能根据条件巧妙构造辅助函数，再根据条件得出所构造辅助函数的性质（单调性、奇偶性等）[1]，就能巧妙地解决此类不等式. 下面就介绍含有 $f'(x)$ 的不等式问题的常见类型及相应可构造的辅助函数.

一、构造四则运算类[3]：

对于不等式 $f'(x)>k(k\neq 0)$，可构造函数 $g(x)=f(x)-kx+b$.

对于不等式 $xf'(x)+f(x)>0$，可构造函数 $g(x)=xf(x)$

对于不等式 $xf'(x)-f(x)>0$，可构造函数 $g(x)=\frac{f(x)}{x}$.

例1　已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=f(-x)$，且当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$f(x)+xf'(x)<0$ 成立，若 $a=(2^{0.1})\cdot f(2^{0.1})$，$b=(\ln 2)\cdot f(\ln 2)$，$c=(\log_2\frac{1}{8})\cdot f(\log_2,\frac{1}{8})$，则 a,b,c 的大小关系是（　）

(A) $a>b>c$　　(B) $c>b>a$

(C) $c>a>b$　　(D) $a>c>b$

解析：当 $x\in(-\infty,0)$ 时，由 $f(x)+xf'(x)<0$，得 $(xf(x))'<0$，设 $g(x)=xf(x)$，则 $g(x)$ 在 $x\in(-\infty,0)$ 时减函数，又由 $f(x)$ 是偶函数可得 $g(x)$ 是奇函数，所以 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上减函数，所以 $c=g(\log_2\frac{1}{8})=g(-\log_2 8)=g(-3)$，又 $-3<\ln 2<2^{0.1}$，所以 $c>b>a$，选(B).

变式1：已知定义域为 $\mathbf{R}$ 的奇函数 $y=f(x)$ 的导函数为 $y=f'(x)$，当 $x\neq 0$ 时，$f'(x)+\frac{f(x)}{x}>0$，若 $a=f(1)$，$b=-2f(-2)$，$c=(\ln\frac{1}{2})f(\ln\frac{1}{2})$，则 a，b，c 的大小关系正确的是（　）

(A) $a<c<b$　　(B) $b<c<a$

(C) $a<b<c$　　(D) $c<a<b$

解析：当 $x\neq 0$ 时，$f'(x)+\frac{f(x)}{x}>0$，得 $\frac{xf'(x)+f(x)}{x}>0$，设 $g(x)=xf(x)$，则当 $x>0$ 时 $g(x)$ 为增函数，又 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是奇函数可得 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上偶函数，所以 $b=g(-2)=g(2)$，$c=g(\ln\frac{1}{2})=g(-\ln 2)=g(\ln 2)$，又 $\ln 2<1<2$，所以 $c<a<b$，所以选(D).

例2　设函数 $f'(x)$ 是奇函数 $f(x)(x\in\mathbf{R})$ 的导函数，$f(-1)=0$，当 $x>0$ 时，$xf'(x)-f(x)<0$，则使得 $f(x)>0$ 成立的 x 的取值范围是（　）

(A) $(-\infty,-1)\cup(0,1)$

(B) $(-1,0)\cup(1,+\infty)$

作者简介：张飞雄(1972 -)，福建宁化人，本科，中学高级教师，主要从事高中数学教学研究

(C) $(-\infty,-1)\cup(-1,0)$

(D) $(0,1)\cup(1,+\infty)$

解析:当 $x>0$ 时,$xf'(x)-f(x)<0$,可得 $\frac{xf'(x)-x'f(x)}{x^2}<0$,设 $g(x)=\frac{f(x)}{x}$,则 $g(x)$ 在 $x>0$ 是减函数,又 $f(x)$ 是奇函数,所以 $g(x)$ 是偶函数,在 $x<0$ 是增函数,又 $f(-1)=0$,所以 $g(-1)=g(1)=0$,结合草图可得 $x>0$ 时 $g(x)>0$ 得 $f(x)>0\Rightarrow x\in(0,1)$,同理 $x<0$ 时 $x\in(-\infty,-1)$,所以选(A).

变式2:已知 $f(x)$ 为定义在 $(0,+\infty)$ 上的可导函数,且 $f(x)>xf'(x)$ 恒成立,则不等式 $x^2f(\frac{1}{x})-f(x)>0$ 的解集为( )

(A) $(1,+\infty)$　　(B) $(-\infty,1)$

(C) $(2,+\infty)$　　(D) $(-\infty,2)$

解析:$x>0$ 由 $f(x)>xf'(x)$ 得 $xf'(x)-f(x)<0$ 可得 $\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}<0$,设 $g(x)=\frac{f(x)}{x}$,则 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上减函数,由 $x^2f(\frac{1}{x})-f(x)>0$ 可得 $xf(\frac{1}{x})>\frac{f(x)}{x}$,即 $g(\frac{1}{x})>g(x)$,所以 $0<\frac{1}{x}<x$ 解得 $x>1$,选(A).

二、构造指数函数构造类

对于不等式 $f'(x)+f(x)>0$,可构造函数 $g(x)=e^xf(x)$

对于不等式 $f'(x)-f(x)>0$,可构造函数 $g(x)=\frac{f(x)}{e^x}$.

对于不等式 $f'(x)+kf(x)>0$,可构造函数 $g(x)=e^{kx}f(x)$.

对于不等式 $f'(x)+\ln a\cdot f(x)>0$,可构造函数 $g(x)=a^xf(x)$.

例3　已知定义在 $\mathbf{R}$ 上函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$,且 $f(x)+f'(x)=\frac{2x-1}{e^x}$,若 $f(0)=0$,
数 $f(x)$ 的单调减区间为( )

(A) $(-\infty,\frac{3-\sqrt5}{2})$ 和 $(\frac{3+\sqrt5}{2},+\infty)$

(B) $(\frac{3-\sqrt5}{2},\frac{3+\sqrt5}{2})$

(C) $(-\infty,3-\sqrt5)$ 和 $(3+\sqrt5,+\infty)$

(D) $(3-\sqrt5,3+\sqrt5)$

解析:由于 $f(x)+f'(x)=\frac{2x-1}{e^x}$,可得 $(e^xf(x))'=2x-1=(x^2-x+c)'$,即 $f(x$
$\frac{x^2-x+c}{e^x}$. $f(0)=0$,所以 $c=0$,$f(x)=\frac{x^2-x}{e^x}$
$f'(x)>0$ 得增区间,选(A).

变式3:已知 $f'(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x$
导函数,且 $f(x)+f'(x)>0$,则 $a=2f(\ln2)$,
$-ef(1)$,$c=f(0)$ 的大小关系为( )

(A) $a<b<c$　　(B) $b<a<c$

(C) $c<a<b$　　(D) $c<b<a$

解析:由 $f(x)+f'(x)>0$ 得 $(e^xf(x))'>$
$g(x)=e^xf(x)$,则 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上递增,又 $0<\ln2$
故 $c<a<b$,选(C).

例4　函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$,对 $\forall x$
都有 $2f'(x)>f(x)$ 成立,若 $f(\ln4)=2$,则不
$f(x)>e^{\frac{x}{2}}$ 的解是( )

(A) $x>\ln4$　　(B) $0<x<\ln4$

(C) $x>1$　　(D) $0<x<1$

解析:由 $2f'(x)>f(x)$ 得 $f'(x)-\frac{1}{2}f(x)$
得到 $e^{\frac{x}{2}}f'(x)-(e^{\frac{x}{2}})'f(x)>0$,
$\frac{e^{\frac{x}{2}}f'(x)-(e^{\frac{x}{2}})'f(x)}{(e^{\frac{x}{2}})^2}>0$,设 $g(x)=\frac{f(x)}{e^{\frac{x}{2}}}$,则
在 $\mathbf{R}$ 上增函数,又 $g(\ln4)=\frac{f(\ln4)}{e^{\frac{\ln4}{2}}}=\frac{2}{2}=1$,

$f(x) > e^{\frac{x}{2}}$可以得到$g(x) = \frac{f(x)}{e^{\frac{x}{2}}} > 1 = g(\ln 4)$,所以$x > \ln 4$,选(A).

变式4:已知定义在**R**上的函数$f(x)$和$g(x)$满足$f(x) = \frac{f'(1)}{2}e^{2x-2} + x^2 - 2f(0)\cdot x$,且$g'(x) + 2g(x) < 0$,则下列不等式成立的( )

(A) $f(2)g(2017) > g(2019)$

(B) $f(2)g(2017) < g(2019)$

(C) $g(2017) > f(2)g(2019)$

(D) $g(2017) < f(2)g(2019)$

解析:由题意得$f'(1) = 2e^2$,$f(0) = 1$,$f(x) = e^{2x} + x^2 - 2x$,$f(2) = e^4$,又$g'(x) + 2g(x) < 0$得$(e^{2x}g(x))' < 0$,设$F(x) = e^{2x}g(x)$,则$F(x)$在**R**上减函数. 所以$F(2017) > F(2019)$,即$e^{2\times 2017}g(2017) > e^{2\times 2019}g(2019)$,

得$g(2017) > e^4g(2019) = f(2)g(2019)$,选(C).

三、构造对数函数类:

对于不等式$\frac{f'(x)}{f(x)} > 0$,可构造函数$g(x) = \ln f(x)$.

对于不等式$f'(x)\ln x + \frac{f(x)}{x} > 0$,可构造函数$g(x) = f(x)\ln x$.

例5 已知$f(x)$是定义在$(0, +\infty)$上的可导函数,其导数为$f'(x)$,且当$x > 0$时,恒有$f'(x)x\ln x + f(x) < 0$,则使得$f(x) > 0$成立的x的取值范围是( )

(A) $(0,1)$ (B) $(1, +\infty)$

(C) $(0,1)\cup(1, +\infty)$ (D) $\varnothing$

解析:设$g(x) = f(x)\ln x$,由$x > 0$时,恒由$f'(x)x\ln x + f(x) < 0$得$f'(x)\ln x + \frac{f(x)}{x} < 0$,则$g'(x) < 0$,故$g(x)$在$(0, +\infty)$递减且$g(1) = 0$,所以当$x > 1$时$g(x) < g(1) = 0$,即$f(x)\ln x < 0$得$f(x) < 0$,当$0 < x < 1$时,$g(x) > g(1) = 0$,即$f(x)\ln x > 0$得$f(x) < 0$,综上得$f(x) > 0$无解,选(D).

四、构造幂函数类

对于不等式$xf'(x) + nf(x) > 0$,可构造函数$g(x) = x^nf(x)$.

对于不等式$xf'(x) - nf(x) > 0$,可构造函数$g(x) = \frac{f(x)}{x^n}$.

例6 已知偶函数$f(x)(x \neq 0)$的导函数为$f'(x)$,且满足$f(-1) = 0$,当$x > 0$时,$2f(x) > xf'(x)$,则$f(x) > 0$成立的x的取值范围是________.

解析:当$x > 0$时,由$2f(x) > xf'(x)$得$\frac{f'(x)\cdot x^2 - f(x)\cdot(x^2)'}{(x^2)^2} < 0$,即$(\frac{f(x)}{x^2})' < 0$,设$g(x) = \frac{f(x)}{x^2}$,则$g(x)$在$(0, +\infty)$上递减,又由$f(x)$是偶函数和$f(-1) = 0$可得$g(x)$也是偶函数且$g(-1) = g(1) = 0$,结合草图可得$f(x) > 0$的解集$(-1, 0)\cup(0,1)$.

五、构造复合函数类与三角函数类

对于不等式$f'(x) + 2xf(x) > 0$,可构造函数$g(x) = e^{x^2}f(x)$.

对于不等式$f(x) + f'(x)\tan x > 0$,可构造函数$g(x) = f(x)\sin x$.

对于不等式$f'(x) - f(x)\tan x > 0$,可构造函数$g(x) = f(x)\cos x$.

例7 已知定义在**R**上的奇函数$f(x)$的导函数为$f'(x)$,当$x < 0$时,$f(x)$满足$2f(x) + xf'(x) < xf(x)$,则$f(x)$在**R**上的零点个数为( )

(A) 5 (B) 3 (C) 1或3 (D) 1

解析:由题意得$f(0) = 0$,当$x < 0$时由$2f(x) + xf'(x) < xf(x)$得$(x^2)'f(x) + x^2f'(x) - x^2f(x) >$

0,可得$(\frac{x^2f(x)}{e^x})'>0$,设$F(x)=\frac{x^2f(x)}{e^x}$,则$F(x)$在$x<0$上是增函数,所以$F(x)<F(0)=0$可得$f(x)<0$,又$f(x)$是奇函数可得$x>0$时$f(x)>0$,故选(D).

变式7:设定义在$(0,+\infty)$的函数$f(x)$的导函数是$f'(x)$,且$x^4f'(x)+3x^3f(x)=e^x$,$f(3)=\frac{e^3}{81}$,则$x>0$时$f(x)$( )

(A) 有极大值,无极小值

(B) 有极小值,无极大值

(C) 既无极大值,又无极小值

(D) 既有极大值,又有极小值

解析:要判断极值需$f'(x)$的符号即要知道单调区间,由条件的$f'(x)=\frac{e^x-3x^2f(x)}{x^4}$,设$h(x)=e^x-3f(x)x^3$,$h'(x)=e^x-3[f'(x)x^3+3f(x)x^2]$,又中括号里与$x^4f'(x)+3x^3f(x)=e^x$左边结构只差乘$x$,故$h'(x)=e^x-\frac{3}{x}[f'(x)x^4+3f(x)x^3]=e^x-\frac{3}{x}\cdot e^x=e^x\cdot\frac{x-3}{3}$,所以$h(x)$有最小值$h(3)=e^3-81f(3)=0$,即$f'(x)\geqslant0$,所以$f(x)$在$(0,+\infty)$没有极值,选(C).

例8 定义在$(0,\frac{\pi}{2})$上的函数$f(x)$,$f'(x)$是它的导函数,且恒有$f(x)<f'(x)\cdot\tan x$成立,则( )

(A) $\sqrt{3}f(\frac{\pi}{4})>\sqrt{2}f(\frac{\pi}{3})$

(B) $f(1)<2f(\frac{\pi}{6})\sin1$

(C) $\sqrt{2}f(\frac{\pi}{6})>f(\frac{\pi}{4})$

(D) $\sqrt{3}f(\frac{\pi}{6})<f(\frac{\pi}{3})$

解析:由$x\in(0,+\infty)$得$\cos x>0$,又$f(x)<f'(x)\cdot\tan x$可得$f'(x)\cdot\sin x-f(x)\cdot(\sin x)'>0$,构造函数$F(x)=\frac{f(x)}{\sin x}$,则$F'(x)>0$,即$F(x)$在$(0,\frac{\pi}{2})$上是增函数,所以$F(\frac{\pi}{4})<F(\frac{\pi}{3})$得$\sqrt{3}f(\frac{\pi}{4})<\sqrt{2}f(\frac{\pi}{3})$,故(A)错,同理(B)、(C)都错,选(D).

变式8:定义在$(0,\frac{\pi}{2})$上的函数$f(x)$,$f'(x)$是它的导函数,且恒有$f(x)\cdot\tan x+f'(x)<0$成立,则( )

(A) $\sqrt{2}f(\frac{\pi}{3})>f(\frac{\pi}{4})$

(B) $\sqrt{3}f(\frac{\pi}{4})>\sqrt{2}f(\frac{\pi}{6})$

(C) $f(\frac{\pi}{3})>\sqrt{3}f(\frac{\pi}{6})$

(D) $\sqrt{3}f(\frac{\pi}{3})<f(\frac{\pi}{6})$

解析:由题意构造$g(x)=\frac{f(x)}{\cos x}$,则$g(x)$在$(0,\frac{\pi}{2})$上递减,故$g(\frac{\pi}{3})<g(\frac{\pi}{6})$,选(D).

通过上述归纳构造辅助函数的方法,相信对同学们有一定帮助.其实要解决含这类的不等式或用之来比较大小等问题,要根据所给式子的结构特征构造出恰当的辅助可导函数,再利用导函数的符号判断原函数的单调性,从而打开解题的通道使问题巧妙获解[2].

参考文献:

[1] 林日平.合理构造可导函数,巧解抽象函数问题[J].数理化学习:高中版,2018(6):47-50.

[2] 吴志鹏.导数四个运算法则构造的函数问题解析[J].数理化学习:高中版,2018(6):13-15.

[福建省宁化第一中学(365400)]