国家新闻出版广电总局认定的学术期刊
国际标准刊号 ISSN 2095-218X 国内统一刊号 CN23-1575/G4

数理化学习

SHULIHUA XUEXI MAGAZINE

2020 / 09
NO.26

高中版
SENIOR HIGH SCHOOL EDITION

ISSN 2095-218X
9 772095 218202 26

目 录

数理化学习

(高中版)
2020 年第 9 期

主管单位:哈尔滨师范大学
主办单位:哈尔滨师范大学
主 编:李双臻
责任编辑:黄永辉 袁建平 李兆东 崔凌飞 张宝清 褚树杰
美术编辑:王 宇
编辑出版:《数理化学习》编辑部
地 址:(150080)哈尔滨市南岗区和兴路 50 号
E - mail:shulihua12@sina.com
发行部电话:(0451)88060217 88060095

出版日期:每月 1 日
发 行:黑龙江省肇东市邮政局
订 阅:全国各地邮政局
发行范围:公开发行
印 刷:哈尔滨久利印刷有限公司

中国标准连续出版物号:ISSN 2095 - 218X / CN23 - 1575/G4

三角函数与基本不等式在求最值问题中“PK”

■ 张飞雄

摘要:在解决一类几何问题的最值时,既可以设角也可以设边,所以也就有一题多解,进而一题多变,最后反思、总结,这样既可以拓展学生的思维,又能提高学生的解题能力,增强学生学习数学的兴趣.

关键词:最值;三角函数;基本不等式

一题多解是一个经常被数学老师提及的词语,对培养和发展学生的发散性思维,构建完善系统数学知识结构很有益处[1]. 但一题多解、一题多变后要善于思考和总结,很多一题多解、一题多变的题目是有相同套路. 我们知道基本不等式在研究最值是有明显的优势,三角函数中根据正弦、余弦的有界性在研究最值的优势也突出. 本文通过三角函数与基本不等式在求最值中“PK”,阐述两种方法在求最值“PK”后的思考与总结. 供读者参考.

一、三角函数与基本不等式在求最值中“PK”

引例:若要在半径 $r=\sqrt{6}$,圆心角 $\angle EOD=\dfrac{\pi}{4}$ 的扇形 ODE 区域内建一个“矩形草坪 $ABCP$,矩形的一边在道路 OD 上,一个顶点在半径 OE 上,另外一个顶点 P 在圆弧 $\overset{\frown}{DE}$ 上,求“矩形草坪” 的面积 S_{ABCP} 的最大值.

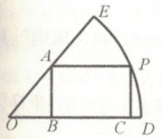

图 1

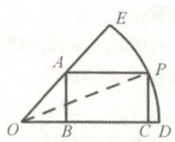

图 2

解法 1:(设角用三角函数求最值):连 OP,设 $\angle POE=\theta, 0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$,则 $PC=\sqrt{6}\sin\theta$, $BC=\sqrt{6}\cos\theta-\sqrt{6}\sin\theta$,“矩形草坪” 的面积为:$S=\sqrt{6}\sin\theta(\sqrt{6}\cos\theta-\sqrt{6}\sin\theta)=6(\sin\theta\cos\theta-\sin^2\theta)=6(\dfrac{1}{2}\sin2\theta+\dfrac{1}{2}\cos2\theta-\dfrac{1}{2})=3\sqrt{2}\sin(2\theta+\dfrac{\pi}{4})-3$

因为 $0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$,所以 $\dfrac{\pi}{4}<2\theta+\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{3\pi}{4}$,

故当 $2\theta+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$,即 $\theta=\dfrac{\pi}{8}$ 时,S 取得最大值 $3\sqrt{2}-3$.

解法 2:(设边用基本不等式求最值):设 $AB=a$,$BC=b$,则 $OB=a$,$OC=a+b$,得 $OP^2=OC^2+PC^2$,得 $6=a^2+2b^2+2ab\geqslant(2\sqrt{2}+2)ab$,当且仅当 $a=\sqrt{2}b$ 时等号成立,

即 $ab\leqslant\dfrac{6}{2\sqrt{2}+2}=3\sqrt{2}-3$,即面积最大值 $3\sqrt{2}-3$.

变式 1:如图 3,现要在一块半径为 $r(r>0)$,圆心角为 $60°$ 的扇形纸板 POQ 上剪出一个平行四边形 $OABC$,使点 B 在弧 PQ 上,点 A 在半径 OP 上,点 C 在半径 OQ 上,令平行四边形 $OABC$ 的面积为 S,则 S 的最大值为______.

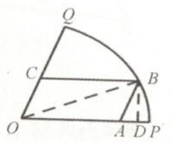

图 3

解法 1:设 $\angle BOP=\theta$,则 $BD=r\sin\theta$,$OA=r\cos\theta-\dfrac{\sqrt{3}}{3}r\sin\theta$

$$S_{OABC}=r\sin\theta(r\cos\theta-\frac{\sqrt{3}}{3}r\sin\theta)=\frac{\sqrt{3}}{3}r^2\sin(2\theta+\frac{\pi}{6})-\frac{\sqrt{3}}{6}r^2.$$

作者简介:张飞雄(1972 –),福建省宁化人,本科,中学高级教师,主要从事高中数学教学研究

当 $\theta=\frac{\pi}{6}$ 时面积最大为 $\frac{\sqrt{3}}{6}r^2$.

解法 2:设 $OA=a$,$OC=b$,在 $\triangle OAB$ 中 $OB^2=a^2+b^2-2ab\cos120°\geqslant 3ab$,可得 $ab\leqslant\frac{r^2}{3}$,$S_{OABC}=ab\sin60°=\frac{\sqrt{3}}{6}r^2$,当且仅当 $a=b$ 时等号成立.

变式 2:如图 4,某公园要在一块圆心角为 $\frac{\pi}{3}$,半径为 20 m 的扇形草坪 OAB 中修建一个内接矩形文化景观区域 $CDEF$,若 $EF\,/\!/\,AB$,则文化景观区域的面积的最大值为多少?

解法 1:连 OC,可证得 $\triangle OEF$ 为等边三角形,$\angle CEA=\frac{\pi}{6}$,设 $\angle COA=\theta$,$FC=40\sin\theta$,$OF=20\cos\theta-20\sqrt{3}\sin\theta$,$S_{CDEF}=800\sin(2\theta+\frac{\pi}{3})-400\sqrt{3}$,

所以当 $\theta=\frac{\pi}{12}$ 时取最大值 $800-400\sqrt{3}$.

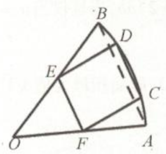

图 4

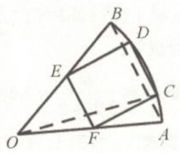

图 5

解法 2:设 $EF=OF=a$,$FC=b$,在 $\triangle OFC$ 中由余弦定理得 $OC^2=a^2+b^2-2ab\cos\frac{5\pi}{6}\geqslant(2+\sqrt{3})ab$,当且仅当 $a=b$ 时等号成立,即 $ab\leqslant\frac{400}{2+\sqrt{3}}=400(2-\sqrt{3})$,所以面积最大值 $800-400\sqrt{3}$.

二、"PK"后的思考[2]

通过引例的不同角度分析解决问题,再对扇形的角度、内接四边形的形状、内接的方向进行了一题多变,可以归纳出解决面积最值的套路相同,可设角也可设边,设角用三角函数求最值,设边用基本不等式求最值,对我们教学也有以下启发.

1. 一题多解培养学生思维的流畅性和创造性

由于数学的内在规律和思考问题的角度不
道题经常可以有多种解法.我们要引导学生对
多方位、多角度思考、探索其多种解法,从而培
多角度思考问题的习惯,打破思维定势.一题多
以有效地训练学生的双基,又培养了他们思维
性;既让学生获得了大胆探索的成功喜悦,又培
们的思维创造性.

2. 一题多变训练学生的思维的深刻性和广

一题多变,适当改变题目的条件和结论,可
出新的题目.我们要充分调动学生参与热情,放
生试着去运用知识,对题目条件或结论进行变
生、生生间充分而有质量的"PK",激发学生的
趣,从而提升学生的思维的深刻性和广阔性,使
到事半功倍的效果.

三、"PK"后的总结

一题多解、一题多变可以使学生更积极的
课堂中来,从而激发学生求知欲.一道数学题
角度不同可得到多种不同的解法,这有助于拓
思路,提高学生分析问题的能力;一道数学题
想、类比、推广,可以得到一系列新题目,甚至得
般的结论,这有助于学生应变能力的提高和发
的形成,增强学生面对新问题敢于分析予以
意识.

参考文献:

[1] 何建东."一题多解"勿忘"择优原则"
建中学数学,2017(01).

[2] 吴定业.三角换元与基本不等式的"争
福建中学数学,2017(01):21-22.

[福建省宁化第一中学(3